и теорема существования решения первой краевой задачи (1), (5) в прямоугольнике Q.

В заключение автор приносит глубокую благодарность научному руководителю профессору С. Н. Кружкову за постановку задачи, постоянное внимание и поддержку в работе.

V. L. Kamynin

A PRIORI ESTIMATES AND SOLVABILITY ON THE WHOLE FOR QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

In this paper we establish some *a priori* estimates for the modules of continuity of restricted solutions of quasilinear parabolic equations without any assumptions about the continuity of their coefficients. These estimates are used in proving the existence theorems for such equations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кружков С. Н. Априорная оценка для производной решения параболического уравнения и некоторые ее применения.— Докл. АН СССР, 1966, **170**, № 3, 501—504.
2. Кружков С. Н. Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными.— Тр. Семинара им. И. Г. Петровского, 1979, вып. 5, с. 217—272.
3. Камынин Л. И., Химченко Б. Н. О строгом принципе экстремума для вырождающихся параболических уравнений второго порядка.— Докл. АН СССР, 1977, **236**, № 5, с. 1060—1064.
4. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., 1968.
5. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., 1964.

Поступила в редакцию
27.11.79

УДК 517.55

П. В. ДОВБУШ

НОРМАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введенные в [1] нормальные мероморфные функции одного комплексного переменного изучали многие авторы. Довольно полный обзор полученных результатов можно найти в статье А. Ловатера [2]. В настоящей заметке вводится понятие нормальной голоморфной функции многих комплексных переменных и доказываются два критерия нормальности функции в областях специального вида. Доказательство опирается на критерий нормальности семейств голоморфных функций многих комплексных переменных. Для одномерного случая он установлен Ф. Марти [3].

1. Пусть $z=(z_1, \ldots, z_n)$ — точка n-мерного комплексного пространства $\mathbf{C}^n$, $n>1$; $(z, w)=\sum\limits_{\mu=1}^{n} z_\mu \overline{w}_\mu$ — эрмитово скалярное произведение; $|z|^2=$ $=\sum\limits_{\mu=1}^{n}|z_\mu|^2$ — квадрат евклидова модуля; $\partial=\sum\limits_{\mu=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_\mu}dz_\mu$ и $\bar\partial=\sum\limits_{\mu=1}^{n}\frac{\partial}{{}^*z_\mu}d\bar z_\mu$ — — операторы дифференцирования, а $dd^c|z|^2$ — евклидова метрическая форма, где $d = \partial + \bar\partial$, а $d^c = \frac{i}{4}(\bar\partial - \partial)$, так что $dd^c = \frac{i}{2}\partial\bar\partial$. Условие положительной определенности эрмитовой дифференциальной формы φ на множестве M будем записывать так: $\varphi > 0$ на M. Множество всех голоморфных функций в области $D \subset \mathbf{C}^n$ обозначим $\mathcal{O}(D)$. Напомним, что семейство $S \subset \mathcal{O}(D)$ называется нормальным, если любая последовательность функций из S содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри D, то есть равномерно сходящуюся на компактных подмножествах D, относительно сферической метрики на $\overline{\mathbf{C}}$.

Лемма (критерий Марти). Семейство $S \subset \mathcal{O}(D)$ нормально тогда и только тогда, когда для любого компакта $A \subset D$ существует постоянная $K(A)$, такая, что для всех $f \in S$ выполняется неравенство

$$K(A)\, dd^c |z|^2 - dd^c \log(1 + |f|^2) > 0 \text{ на } A. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$H_z(\log(1 + |f|^2), \omega) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \log(1 + |f|^2)}{\partial z_\mu \partial \bar z_\nu} \omega_\mu \bar\omega_\nu$$

есть форма Леви функции $\log(1+|f|^2)$ в точке z. Согласно (1) имеем

$$H_z(\log(1 + |f|^2), \omega) < K(A) |\omega|^2$$

для всех $z \in A$, всех $\omega \in \mathbf{C}^n / \{0\}$ и всех $f \in S$. Предположим, что семейство S нормально, но неравенство (1) не выполняется. Тогда найдутся такие компакт $E \subset D$; последовательность точек $\{z^m\}$, $z^m \in E$, $z^m \to z^0$ при $m \to \infty$; последовательность векторов $\{\omega^m\}$, $\omega^m \in \mathbf{C}^n$, $\omega^m \to \omega^0$ при $m \to \infty$, и последовательность функций $\{f_m\} \subset S$, что

$$H_{z^m}(\log(1 + |f_m|^2), \omega^m) > m |\omega^m|^2, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Так как семейство S нормально, то из последовательности $\{f_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{g_k\} \subset \{f_m\}$, равномерно сходящуюся внутри D либо к голоморфной функции, либо к тождественной ∞. Если последовательность $\{g_k\}$ равномерно внутри D сходится к ∞, то существует k, такое, что для всех $k \geqslant k_0$ в замкнутом шаре $\bar B^n(z, r) = \{|z - z^0| \leqslant r\} \subset D$ все функции $\frac{1}{g_k}$, $k \geqslant k_0$, голоморфны в $\bar B^n(z^0, r)$ и равномерно сходятся к нулю. Так как функции g_k, $k \geqslant k_0$, не равны нулю и голоморфны в $B^n(z^0, r)$, то

$$H_z(\log |g_k|^2, \omega) \equiv 0, \qquad z \in \bar B^n(z^0, r).$$

Поэтому при $k \geqslant k_0$

$$H_z(\log(1 + |g_k|^2), \omega) \equiv H_z(\log(1 + |g_k|^{-2}), \omega), \qquad z \in \bar B^n(z^0, r).$$

Следовательно, достаточно рассмотреть случай равномерной сходимости внутри D последовательности $\{g_k\}$ к функции $g \in \mathcal{O}(D)$. В этом случае на $\bar B^n(z^0, r)$ имеет место равномерная при $k \to \infty$ оценка

$$H_{z^k}(\log(1 + |g_k|^2), \omega^k) = H_{z^0}(\log(1 + |g|^2), \omega^0) + o(1) < O(1),$$

которая противоречит неравенствам (2).

Достаточность. Фиксируем точку $z^0 \in D$. Пусть на $\bar B^n(z^0, r) \subset D$ для всех $f \in S$ выполнено неравенство (1). Сужение этого неравенства на комплексную прямую $l_\xi(\lambda): z=z^0+\lambda\xi$, где $\lambda\in\mathbf{C}^1$, а $\xi\in\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$, имеет вид

$$|g'(\lambda)|^2(1+|g(\lambda)|^2)^{-2}d\lambda\wedge d\bar{\lambda}<K(\bar{B}^n(z^0,r))\,d\lambda\wedge d\bar{\lambda}, \qquad |\lambda|<r,$$

где $g(\lambda)=f(l_\xi(\lambda))$. Тогда по одномерному критерию Марти на каждой прямой $l_\xi(\lambda)$ семейство S нормально, а по теореме Александера ([4], теорема 6.2(a)) оно нормально и в шаре $\bar{B}^n(z^0,r)$. Так как свойство нормальности — это локальное свойство, то лемма доказана.

Замечание 1. Доказательство достаточности в лемме можно провести, не опираясь на одномерный критерий Марти и теорему Александера.

2. Пусть далее D — область в $\mathbf{C}^n$, $n>1$, на которой ее группа биголоморфных автоморфизмов $\mathrm{Aut}(D)$ действует транзитивно.

Определение 1. Функция $f\in\mathcal{O}(D)$ называется нормальной, если нормально семейство $\{f(g)\}$, $g\in\mathrm{Aut}(D)$.

Теорема 1. Пусть D — однородная область в $\mathbf{C}^n$, $n>1$; z^0 — точка в D, в которой дифференциальная форма

$$dd^c\log K_D(z)|_{z_0}=c(D)\,dd^c|z|^2,$$

где $K_D(z)$ — функция Бергмана области D, а постоянная $c(D)$ не равна 0 и зависит только от области D. Голоморфная в области D функция f будет нормальной тогда и только тогда, когда найдется постоянная K, такая, что эрмитова дифференциальная форма

$$\Omega=Kdd^c\log K_D(z)-dd^c\log(1+|f|^2)>0 \text{ на } D. \tag{3}$$

Замечание 2. Условиям теоремы 1, в частности, удовлетворяют области $D_{p,q}$ (см. [5], с. 161).

Доказательство. Необходимость. Пусть функция f нормальна в области D; тогда по лемме в точке z^0 выполняется неравенство

$$H_{z_0}(\log(1+|f(g)|^2),\omega)<K_1|\omega|^2 \tag{4}$$

для всех $\omega\in\mathbf{C}^n\setminus\{0\}$ и всех $g\in\mathrm{Aut}(D)$.

Так как для любого $g\in\mathrm{Aut}(D)$ и любых $z^0\in D$ и $\omega\in\mathbf{C}^n$

$$H_{z_0}(\log(1+|f(g)|^2),\omega)=H_z(\log(1+|f|^2),g_*\omega),$$

где $g_*=dg$ — дифференциал отображения g в точке z^0, а $z=g(z^0)$, то, положив в неравенстве (4) $\omega=g_*^{-1}\xi$, $\xi\in\mathbf{C}^n$, получим

$$H_z(\log(1+|f|^2),\xi)<K_1\,(g_*^{-1}\xi,g_*^{-1}\xi).$$

В силу инвариантности бергмановой формы $ds_D^2(z,dz)$ области D относительно действия группы $\mathrm{Aut}(D)$ и условий на D имеем

$$ds_D^2(z,\xi)=c(D)\,(g_*^{-1}\xi,g_*^{-1}\xi).$$

Тогда

$$H_z(\log(1+|f|^2),\xi)<Kds_D^2(z,\xi), \qquad z\in D,$$

где $K=\frac{K_1}{c(D)}$. Перейдя в этом неравенстве от эрмитовых форм к дифференциальным, получим неравенство (3).

Достаточность. Любой автоморфизм $g\in\mathrm{Aut}(D)$ индуцирует на дифференциальных формах в D отображение g^*. Так как форма $\Omega>0$ на D, то

$$g^*\Omega=Kdd^c\log K_D(z)-dd^c\log(1+|f(g)|^2)>0 \text{ на } D.$$

Отсюда и из того, что бергманова и евклидова метрики эквивалентны на компактах в D, получаем, что для любого компакта $A \subset D$ найдется постоянная $K(A)$, такая, что для любого автоморфизма $g \in \mathrm{Aut}(D)$ эрмитова дифференциальная форма

$$K(A)\, dd^c |z|^2 - dd^c \log(1 + |f(g)|^2) > 0 \text{ на } A.$$

Следовательно, по лемме семейство $\{f(g)\}$, $g \in \mathrm{Aut}(D)$, нормально в D.

3. Пусть $\lambda_D(z, w)$ — расстояние Бергмана в области D; $B_\varepsilon^{\lambda_D}(z^0) = \{z \in D,\ \lambda_D(z^0, z) < \varepsilon\}$ — шар в метрике Бергмана радиуса ε с центром в точке $z^0 \in D$.

Определение 2. Последовательность $\{z^m\}$, $z^m \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, называется P-последовательностью функции $f \in \mathcal{O}(D)$, если: 1) $z^m \longrightarrow \partial D$ при $m \longrightarrow \infty$, 2) для любого $\varepsilon > 0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z^{m_k}\}$ в объединении $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_\varepsilon^{\lambda_D}(z^{m_k})$ функция f бесконечно часто принимает все значения из $\overline{\mathbf{C}}$, за исключением, быть может, одного.

Теорема 2. Если область $D \subset \mathbf{C}^n$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то голоморфная в области D функция f обладает P-последовательностью тогда и только тогда, когда

$$\lim_{z \to \partial D} \sup_{|\omega| = 1} H_z(\log(1 + |f|^2), \omega)\,(ds_D^2(z, \omega))^{-1} = +\infty, \tag{5}$$

то есть тогда и только тогда, когда f не является нормальной в D.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{z^m\}$, $z^m \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, — P-последовательность функции f. Рассмотрим семейство $\{f(g_m)\}$, $g_m \in \mathrm{Aut}(D)$, $g_m(z^0) = z^m$. В любом шаре $B_\varepsilon^{\lambda_D}(z^0)$ функции этого семейства в совокупности принимают все значения из $\overline{\mathbf{C}}$ бесконечно часто, за исключением, быть может, одного. Поэтому модуль непрерывности этого семейства в точке z^0 равен единице, и, значит, оно не может быть нормальным в любой окрестности z^0.

Достаточность. Пусть f не является нормальной в области D; тогда из теоремы 1 следует, что для любого m существуют точка z^m и вектор $\omega^m \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$, такие, что

$$H_{z^m}(\log(1 + |f|^2), \omega^m) > m\, ds_D^2(z^m, \omega^m). \tag{6}$$

Очевидно, что $z^m \longrightarrow \partial D$ при $m \longrightarrow \infty$. Предположим, что $\{z^m\}$ не является P-последовательностью функции f. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$, такое, что в объединении $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_\varepsilon^{\lambda_D}(z^m)$ функция f не принимает двух конечных значений, и потому семейство $\{f(g_m)\}$, $g_m \in \mathrm{Aut}(D)$, $g_m(z^0) = z^m$ в совокупности не принимает двух конечных значений в шаре $B_\varepsilon^{\lambda_D}(z^0)$. По критерию нормальности Монтеля (см. [6], с. 198) семейство $\{f(g_m)\}$ нормально в шаре $B_\varepsilon^{\lambda_D}(z^0)$. Выбрав в качестве компакта точку z^0, по лемме получим

$$H_{z_0}(\log(1 + |f(g_m)|^2), \omega) < K|\omega|^2.$$

Тогда имеем неравенства

$$H_{z^m}(\log(1 + |f|^2), \omega) < K ds_D^2(z^m, \omega),$$

которые противоречат неравенствам (6).

Замечание 3. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что любая последовательность точек, на которой реализуется условие (5), будет P-последовательностью функции f.

Замечание 4. Определение 2 и теорема 2 для случая одного переменного рассмотрены в работе [7].

Автор глубоко благодарен В. И. Гаврилову за постановку задачи и Б. В. Шабату, чьи советы использованы при написании этой работы.

P. V. Dovbush

NORMAL FUNCTIONS OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES

In this paper we introduce the notion of a normal holomorphic function of several complex variables and prove two criteria of the normality of a function in domains of special type. The proof is based on the criterion of normality of the families of holomorphic functions of several complex variables proved in the one-dimensional case by F. Marti.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Levto O., Virtanen K. I. Boundary behaviour and normal meromorphic functions.— Acta math., 1957, **97**, N 1—2, p. 47—65.
2. Ловатер А. Граничное поведение аналитических и мероморфных функций. — В кн.: Матем. анализ (Итоги науки), т. 10. М., 1973, с. 99—289.
3. Marty F. Recherches sur la répartition des valeurs d'une fonction méromorphe.— Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse sci. math. et sci. phys. (3), 1931, **23**, p. 183—261.
4. Alexander H. Volumes of images of varieties in projective and grossmanians.— Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **189**, p. 237—249.
5. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of differential geometry, v. 2. Wiley, 1969.
6. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. М.—Л., 1936.
7. Гаврилов В. И. О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными.— Матем. сб., 1965, **67**, № 3, с. 408—427.

Поступила в редакцию
18.07.79

УДК 517.9

А. А. ЛОКШИН

ВЕЩЕСТВЕННАЯ ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ВОЛНОВОМУ ОПЕРАТОРУ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ ВРЕМЕНЕМ

Как известно, фундаментальное решение $\mathscr{E}(t, x)$ оператора, описывающего колебания одномерной наследственно-упругой среды,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathscr{E}(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{E}(t, x) + \int_{-\infty}^{t} R(t-\tau)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathscr{E}(\tau, x)\,d\tau = \delta(t)\,\delta(x)$$

выражается формулой

$$\mathscr{E}(t, x) = L^{-1}_{p\to t}\frac{\sqrt{1+\overline{K}(p)}}{2p}e^{-p\sqrt{1+\overline{K}(p)}}.$$