где $M=\Omega_{11}(t_{j+1}, t_j)$ для $i=1$; $M=\Omega_{11}(t_j, t_{j+1})$ для $i=2$;

$$(A_{2i}d\mathbf{v}_j^+) = M^{-1}\left[\left(-\frac{\partial M}{\partial \mathbf{v}_j^+}d\mathbf{v}_j^+\right) + \left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{r}_j}\Omega_{21}^{-1}(t_{j+1}, t_j)\,\Omega_{22}(t_{j+1}, t_j)\,d\mathbf{v}_j^+\right)\right]M^{-1},$$

$$B_{2i} = M^{-1}\left[\left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{v}_j^+}\mathbf{g}_j\right) - \left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{r}_j}\Omega_{21}^{-1}(t_{j+1}, t_j)\,\Omega_{22}(t_{j+1}, t_j)\,\mathbf{g}_j\right)\right]M^{-1},$$

$$(C_{2i}d\mathbf{v}_{j+1}^-) = -M^{-1}\left[\frac{\partial M}{\partial \mathbf{r}_j}\Omega_{21}^{-1}(t_{j+1}, t_j)\,d\mathbf{v}_{j+1}^-\right]M^{-1},$$

$$D_{2i} = M^{-1}\left[\frac{\partial M}{\partial \mathbf{r}_j}\Omega_{21}^{-1}(t_{j+1}, t_j)\,\mathbf{g}_{j+1}\right]M^{-1},$$

где $M=\Omega_{12}(t_{j+1}, t_j)$ для $i=1$; $M=\Omega_{12}(t_j, t_{j+1})$ для $i=2$.

В работе [3] нахождение первых и вторых изохронных производных на кеплеровой дуге сведено к решению нескольких систем линейных алгебраических уравнений, поэтому представленные выше формулы позволяют находить зависимости (2)—(4) без применения в процессе счета численного дифференцирования.

Таким образом, получен метод аналитического расчета по точным формулам вариаций сопряженных переменных, необходимых для оптимизации импульсных перелетов в центральном поле тяготения. Использование этого метода существенно повышает точность вычисления указанных вариаций, и за счет этого улучшается сходимость итерационных методов, применяемых при поиске стационарных решений.

A. I. Glazkov

A COMPUTATION OF VARIATIONS OF CONJUGATE VARIABLES ALONG THE TRAJECTORY OF AN IMPULSE FLIGHT IN A CENTRAL GRAVITATIONAL FIELD

We derive some formulae for computing variations of some variables that are conjugate to the radius and velocity vectors in the points of impulse application on a certain trajectory of flight. These formulae enable avoiding numerical differentiation while optimizing impulse flights in central gravitational fields.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лайон П. М., Хелделсмен М. Базис-вектор для импульсных траекторий с закрепленным временем полета.— Ракетн. техника и космонавтика, 1968, **6**, № 1, с. 153—160.
2. Ивашкин В. В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М., 1975.
3. Бахшиян Б. Ц., Суханов А. А. Об изохронных производных первого и второго порядка в задаче двух тел.— Космич. исследования, 1978, **16**, вып. 4, с. 481—492.

Поступила в редакцию
25.11.80

УДК 517.55

П. В. Довбуш

ТЕОРЕМА ЛИНДЕЛЁФА В $\mathbf{C}^n$

Для ограниченных голоморфных функций теорема Линделёфа в $\mathbf{C}^n$, учитывающая возможность касательного подхода вдоль комплексных касательных направлений, сформулирована и доказана в работе [1].

В настоящей заметке рассматривается множество функций, которые являются многомерным аналогом множества нормальных голоморфных функций от одного переменного и содержат все ограниченные голоморфные функции. Для таких функций доказывается теорема Линделёфа, учитывающая возможность касательного подхода вдоль комплексной касательной плоскости.

Метрика Каратеодори. Пусть D — ограниченная область в комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$ с комплексными координатами $z_1, \ldots, z_n$; $\mathcal{O}(D)$ — множество всех голоморфных функций в области D. Обозначим $|f|_D = \sup\{f(z),\ z \in D\}$.

Инфинитезимальная форма F_c метрики Каратеодори определяется следующим образом: для всех $z \in D$ и всех $\omega \in \mathbf{C}^n$

$$F_c(z, \omega) = \sup\left\{\left|\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f(z)}{\partial z_\mu} \omega_\mu\right| : f \in \mathcal{O}(D),\ |f|_D < 1\right\}.$$

С помощью функции $F_c : D \times \mathbf{C}^n \to \mathbf{R}^+$ определим расстояние $\rho_c(z, z') = \inf\int_0^1 F_c(\gamma(l), \dot{\gamma}(l))\, dl$, где нижняя грань берется по всем кривым $\gamma : [0, 1] \to D$, $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = z'$.

Класс $N(D)$. Функция f принадлежит классу $N(D)$, если $f \in \mathcal{O}(D)$ и найдется постоянная M, такая, что для всех $z \in D$ и всех $\omega \in \mathbf{C}^n$

$$H_z(\log(1 + |f|^2),\ \omega) \leqslant M(F_c(z, \omega))^2, \tag{1}$$

где

$$H_z(\log(1 + |f|^2), \omega) = \left|\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f(z)}{\partial z_\mu} \omega_\mu\right|^2 (1 + |f|^2)^{-2},$$

есть форма Леви функции $\log(1 + |f|^2)$ в точке $z \in D$.

Очевидно, что все ограниченные голоморфные функции в области D принадлежат классу $N(D)$. Если D — единичный шар в $\mathbf{C}^n$ то функции $f \in N(D)$ являются нормальными функциями ([2], теорема 2).

Допустимые области и допустимые пределы. Для фиксированных α, $k > 0$ и ε, $0 < \varepsilon < 1$ определим область

$$A_\alpha(\xi) = \{z \in D : |(z - \xi, \nu_\xi)| < (1 + \alpha)\delta_\xi(z),\ |z - \xi|^2 < k\delta_\xi(z)^{1+\varepsilon}\},$$

где ν_ξ — вектор единичной внешней нормали к ∂D в точке ξ; $(\cdot, \cdot)$ — обычное эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$, а $\delta_\xi(z) = \min(\delta(z), d_\xi(z))$. Здесь $\delta(z)$ обозначает евклидово расстояние от точки z до ∂D, а $d_\xi(z)$ — евклидово расстояние от точки z до $(2n-1)$-мерной касательной плоскости T_ξ к ∂D в точке ξ.

Область $A_\alpha(\xi)$ касается комплексной касательной плоскости $T_\xi{}^c = T_\xi \cap iT_\xi$ (касание хуже параболического), а в направлении вектора $i\nu_\xi$ образует с T_ξ угол, меньший π.

Функция $f \in \mathcal{O}(D)$ имеет допустимый предел $f(\xi)$ в точке $\xi \in \partial D$, если $\lim\limits_{\substack{z \to \xi \\ z \in A_\alpha(\xi)}} f(z) = f(\xi)$ для всех $\alpha > 0$.

Теорема Линделёфа. Кривая $\{z(t),\ 0 < t \leqslant 1\} \subset D$ называется асимптотической некасательной кривой в точке $\xi \in \partial D$, если $\lim\limits_{t \to 0} z(t) = \xi$ и существует «конус» $\Gamma_\alpha(\xi) = \{z \in D : |z - \xi| < (1 + \alpha)\delta_\xi(z)\}$, который ее содержит.

Теорема. *Если $f \in N(D)$, где D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^n$ с границей класса C^2 и f имеет предел $f(\xi)$ вдоль некоторой не-*

касательной асимптотической кривой в точке $\xi \in \partial D$, то f имеет в этой точке допустимый предел, равный $f(\xi)$.

Лемма. *Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$; $\{z_m\}$ и $\{z'_m\}$ — две последовательности точек из D, таких, что*

$$\lim_{m\to\infty} z_m = \xi \text{ и } \lim_{m\to\infty} \rho_c(z_m, z'_m) = 0.$$

Если $f \in N(D)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} f(z_m) = f(\xi)$,

то и

$$\lim_{m\to\infty} f(z'_m) = f(\xi).$$

Доказательство. Так как $f \in N(D)$, то из (1) и определения расстояния ρ_c следует неравенство

$$\rho_c(z_m, z'_m) \geqslant \frac{1}{\sqrt{M}} \inf \int_0^1 \frac{|g'(l)|\,dl}{1+|g(l)|^2}, \tag{2}$$

где $g(l) = f(\gamma(l))$, а γ — гладкая кривая в D, соединяющая точки z_m и z'_m. Длина кривой $g(l)$, $g(0) = f(z_m)$ $g(1) = f(z'_m)$ в сферической метрике $(1+|z|^2)^{-2} dz \wedge d\bar{z}$ равняется $\int\limits_0^1 \frac{|g'(l)|\,dl}{1+|g(l)|^2}$. По условию $\rho_c(z_m, z'_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому из неравенства (2) следует, что сферическое расстояние между точками $f(z_m)$ и $f(z'_m)$ стремится к нулю при $m \to \infty$, откуда и следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Выберем координаты в $\mathbf{C}^n$ таким образом, чтобы начало координат совпало с точкой ξ, комплексная касательная плоскость T_ξ^c была задана уравнением $z_1 = 0$, а комплексная нормаль —

$$N_\xi^c = \{z \in \mathbf{C}^n,\ z_2 = \ldots = z_n = 0\}.$$

Обозначим через π проекцию $\mathbf{C}^n$ на первую координату, то есть если $z \in \mathbf{C}^n$ и $z = (z_1, \ldots, z_n)$, то $\pi(z) = z_1$.

Пусть $\{z(t),\ 0 < t \leqslant 1\} \subset D$ — асимптотическая некасательная кривая в точке ξ, вдоль которой у f существует предел $f(\xi)$. Из определения расстояния ρ_c следует, что

$$\rho_c(z(t), \pi(z(t))) \leqslant \int_0^1 F_c(\gamma(l), \dot{\gamma}(l))\,dl, \tag{3}$$

где

$$\gamma(l) = (z_1(t), l z_2(t), \ldots, l z_n(t)),\ l \in [0, 1].$$

Так как область строго псевдовыпукла и вектор $\dot{\gamma}(l)$ параллелен комплексной касательной плоскости T_ξ^c, то

$$F_c(\gamma(l), \dot{\gamma}(l)) \leqslant \frac{\text{const}\,|\dot{\gamma}(l)|}{\sqrt{\delta(\gamma(l))}} \tag{4}$$

([3], с. 75). Кривая $\{z(t),\ 0 < t \leqslant 1\} \subset D$ принадлежит некоторому «конусу» $\Gamma_\alpha(\xi)$, поэтому $|\dot{\gamma}(l)| < \alpha\delta_\xi(z)$ и найдутся две постоянные c_1 и c_2, такие, что $c_1 \leqslant \delta(\gamma(l))/\delta(z(t)) < c_2$ для всех $l \in [0, 1]$. Отсюда с учетом неравенств (3) и (4) получаем неравенство

$$\rho_c(z(t)),\ \pi(z(t)) \leqslant \text{const}\sqrt{\delta(z(t))} \to 0 \tag{5}$$

при $t \to 0$. Поскольку ∂D класса C^2, то найдется шар B с центром в некоторой точке $w(\xi)$, такой, что $B \subset D$ и $\partial B \cap \partial D = \{\xi\}$. Из свойства сжимаемости метрики Каратеодори при биголоморфных отображениях имеем

$$F_{c, B\cap N_\xi^c}(z, \omega) \geqslant F_{c,D}(z, \omega) \tag{6}$$

для всех $z \in B \cap N_\xi^c$ и для всех векторов $\omega = \mathbf{C}^n$. Из неравенств (1) и (6) и теоремы 3 из [4] следует, что функция $f(\pi(z))$ нормальная в круге $U = B \cap N_\xi^c$. Функция имеет предел $f(\xi)$ вдоль асимптотической некасательной кривой $\pi(z(t))$, лежащей в U. Это следует из неравенства (5) и леммы. Отсюда, используя теорему 2 из [4], получаем, что функция одного переменного $f(\pi(z))$ имеет угловой предел $f(\xi)$. Можно показать, что

$$\rho_c(z, \pi(z)) \to 0$$

при $z \to \xi$, $z \in A_\alpha(\xi)$. Отсюда, используя лемму и тот факт, что функция $f(\pi(z))$ имеет угловой предел $f(\xi)$ в точке ξ, получаем, что f имеет допустимый предел $f(\xi)$. Теорема доказана.

Замечание. Если в определении класса $N(D)$ метрику Каратеодори F_c заменить метрикой Бергмана F_b, то теорема Линделёфа для этого класса функций доказывается аналогично.

Автор благодарен В. И. Гаврилову за постоянную помощь и поддержку в работе.

P. W. Dovbush

LINDELÖF'S THEOREM IN C^n

We consider a set of functions which is an n-dimensional analogue of a set of normal holomorphic functions of one complex variable. This set contains the set of all bounded holomorphic functions. For the functions in this set we prove the Lindelöf theorem considering a possibility of a tangential approach along a complex plane.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чирка Е. М. Теоремы Линделёфа и Фату в $\mathbf{C}^n$.— Матем. сб., 1973, **92** (134), с. 622—644.
2. Довбуш П. В. Нормальные функции нескольких комплексных переменных.— Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1981, № 1, с. 38—42.
3. Хенкин Г. М., Чирка Е. М. Граничные свойства голоморфных функций нескольких комплексных переменных. «Итоги науки». М., 1975, с. 13—143.
4. Lexto O., Virtanen K. I. Boundary behaviour and normal meromorphic functions.— Acta Math., 1957, **97**, p. 47—65.

Поступила в редакцию
31.12.80

УДК 511

А. Н. Коробов

ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Пусть a, $a+b$, $s \in \mathbf{N}$ и

$$\psi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{n+s\nu}}{(as)^\nu \nu!} \prod_{x=1}^{n+s\nu} (ax+b)^{-1}, \qquad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Теорема. *Пусть* $\mathbf{I}$ — *мнимое квадратичное поле или* $\mathbf{Q}$; $c \in \mathbf{Z}_\mathbf{I}$, $c \neq 0$. *Существует такая константа* $\gamma = \gamma(a, b, c, s) > 0$, *что для любых* $h_0, \ldots, h_s \in \mathbf{Z}_\mathbf{I}$, $|h_0| + \ldots + |h_s| \neq 0$