В. И. Гаврилов, П. В. Довбуш, Граничные особенности, порождаемые предельными множествами функций нескольких комплексных переменных, *Докл. АН СССР*, 1982, том 265, номер 5, 1047–1050

УДК 517.55 МАТЕМАТИКА

В.И. ГАВРИЛОВ, П.В. ДОВБУШ

ГРАНИЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 2 XII 1981)

В статье [1] предложен дедуктивный подход к изучению граничных особенностей мероморфных функций одного комплексного переменного, исходя из свойств предельных множеств произвольных комплекснозначных функций. Носителем свойства аналитичности (мероморфности) оказалось понятие P-последовательности, введенное и изученное для мероморфных функций ранее (см., например, [2]). Этот подход получил дальнейшее развитие в [3–5] и в работах других авторов. В статьях [6, 7] понятие P-последовательности и ее свойства перенесены на случай голоморфных функций нескольких комплексных переменных и использованы, в частности, в изучении асимптотических свойств нормальных голоморфных функций нескольких комплексных переменных. Цель настоящей статьи – показать, что упомянутый выше подход может быть применим и в многомерном случае в изучении предельных множеств голоморфных функций.

1. Пусть B – единичный шар $B = \{z \in \mathbf{C}^n;\ |z| < 1\}$ в пространстве $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, и ds – метрика Бергмана в B. Расстояние $\rho(z, w)$ (в метрике Бергмана) между точками z и w шара B определяется формулой $\rho(z, w) = \inf \int\limits_0^1 [ds(\gamma(t))]^{1/2} dt$, в которой $\inf$ берется по всем кусочно-гладким кривым γ: $[0, 1] \to B$, $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$. Пусть $B_\epsilon(z) = \{w \in B;\ \rho(z, w) < \epsilon\}$ для произвольной точки $z \in B$ и числа $\epsilon > 0$. Для произвольной хорды h_ξ шара B, оканчивающейся в граничной точке ξ, $\xi \in \partial B$, положим

$$A_\epsilon(h_\xi) = \bigcup_{z \in h_\xi} B_\epsilon(z).$$

Рассмотрим произвольную функцию f: $B \to \Omega$ из шара B в сферу Римана Ω, произвольное множество $S \subset B$, для которого точка $\xi \in \partial B$ является предельной точкой, и обозначим через $C(f, \xi, S)$ предельное множество функции f в точке ξ относительно множества S; т.е. обозначим через $C(f, \xi, S)$ совокупность таких точек $a \in \Omega$, что $a = \lim\limits_{m \to \infty} f(z_m^{(a)})$ по некоторой последовательности точек $z_m^{(a)} \in S$, $m = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{m \to \infty} z_m^{(a)} = \xi$. Другими словами, $C(f, \xi, S) = \bigcap\limits_{\epsilon > 0} \overline{f(S \cap U_r(\xi))}$, где $U_r(\xi) = \{z \in B;\ |z - \xi| < r\}$, $r > 0$, и черта обозначает замыкание множества.

Определим следующие множества граничных особенностей функции f: $B \to \Omega$. Положим: $C(f) = \{\xi \in \partial B;\ C(f, \xi, A_\epsilon(h_\xi)) = C(f, \xi, B)$ для любой хорды h_ξ, оканчивающейся в ξ, и любого $\epsilon > 0\}$, $I(f) = \{\xi \in \partial B;\ C(f, \xi, A_\epsilon(h_\xi)) = \Omega$ для любой хорды h_ξ, оканчивающейся в ξ, и любого $\epsilon > 0\}$ и $M(f) = \{\xi \in \partial B;$ 1) $C(f, \xi, h_\xi) = C(f, \xi, B)$ для каждой хорды h_ξ, оканчивающейся в ξ, и 2) $C(f, \xi, B) \neq \Omega\}$.

Теорема 1. *Для произвольной функции f: $B \to \Omega$ множество $\partial B - C(f) = E$ является множеством первой категории и типа F_σ на ∂B.*

Доказательство этой теоремы проведем по схеме, предложенной для случая $n = 1$, когда эта теорема переходит в известный результат Е.П. Долженко [8].

Фиксируем точку $\xi_0 \in \partial B$. Рассмотрим счетное множество хорд $\{h^i_{\xi_0}\}$, всюду плотное во множестве всех хорд шара B, оканчивающихся в ξ_0. Пусть $\{\epsilon_j\}$ обозначает множество всех неотрицательных рациональных чисел. Счетное множество областей $A_{\epsilon_j}(h^i_{\xi_0})$ обозначим $\{A^m(\xi_0)\}$. Положим $A^{m,q}(\xi_0) = A^m(\xi_0) \cap \{z \in \mathbf{C}^n; |z| > 1 - 1/q\}$, где q – натуральное число, и рассмотрим множество $\{A^{m,q}(\xi_0)\}$. Пусть $\{A^{m,q}(\xi)\}$ обозначает образ множества $\{A^{m,q}(\xi_0)\}$ при повороте шара B, переводящем точку ξ_0 в произвольную точку $\xi \in \partial B$. Поскольку метрика Бергмана инвариантна относительно биголоморфных автоморфизмов шара B, геометрические свойства множества $\{A^{m,q}(\xi)\}$ не зависят от выбора точки $\xi \in \partial B$.

Рассмотрим на Ω множество точек с рациональными координатами и рассмотрим множество замкнутых кругов с центрами в этих точках, радиусы которых суть рациональные положительные числа. Множество таких кругов обозначим $\{\Omega_\nu\}$, радиус замкнутого круга Ω_ν равен $r_\nu > 0$.

Обозначим через $E_{m,q,\nu}$ множество точек ξ на ∂B, в которых выполнены следующие два свойства:

1) $C(f, \xi, B) \cap \Omega_\nu \neq \phi$;

2) множество $\{a; a = f(z), z \in A^{m,q}(\xi)\}$ отстоит от Ω_ν на расстоянии, большем r_ν.

Из определений следует, что $E = \cup E_{m,q,\nu}$. Используя геометрию шара B, заключаем, что каждое из множеств $E_{m,q,\nu}$ замкнуто и нигде не плотно на ∂B.

Аналогичными рассуждениями доказывается

Т е о р е м а 2. *Для произвольной функции* f: $B \to \Omega$ *множество* $I(f)$ *имеет тип* G_δ *на* ∂B.

2. Рассмотрим теперь голоморфные в B функции, множество которых обозначим $\mathcal{O}(B)$.

Л е м м а 1. *Для произвольной функции* $f \in \mathcal{O}(B)$ *справедливо разложение* $C(f) = M(f) \cup I(f)$.

Т е о р е м а 3. *Для произвольной функции* $f \in \mathcal{O}(B)$ *имеем* $\partial B = M(f) \cup \cup I(f) \cup E$, *где* E *– множество первой категории и типа* F_σ *на* ∂B.

З а м е ч а н и е 1. В случае $n = 1$ лемма 1 и теорема 3, являющаяся уточненной формой теоремы Мейера, доказаны в работе [4] для произвольной мероморфной функции.

3. Доказательство леммы 1 опирается на свойства P-последовательностей, установленные в [6].

Напомним, что последовательность точек $\{z_m\}$ шара B называется P-п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю д л я ф у н к ц и и $f \in \mathcal{O}(B)$, если:

1) $\lim\limits_{m \to \infty} |z_m| = 1$,

2) для любого $\epsilon > 0$ и любой бесконечной подпоследовательности $\{z_k\} \subset \subset \{z_m\}$ функция f в объединении $\bigcup\limits_k^\infty B_\epsilon(z_k)$ принимает бесконечно часто каждое комплексное значение, за возможным одним исключением.

В случае $n = 1$ это понятие применимо также к мероморфным функциям (см., например, [2]).

Существование P-последовательностей у функции $f \in \mathcal{O}(B)$ полностью характеризуется поведением функции $q_f(z) = |\nabla f(z)|^2(1 + |f(z)|^2)^{-2}$, где $|\nabla f(z)|$ обозначает модуль градиента функции f в точке $z \in B$ в метрике Бергмана (см. [6]). Установленные в [6] свойства P-последовательностей функции $f \in \mathcal{O}(B)$ позволяют доказать следующую лемму.

Л е м м а 2. *Для того чтобы хорда* h_ξ *шара* B, *оканчивающаяся в точке* $\xi \in \partial B$, *не содержала* P-*последовательностей функции* $f \in \mathcal{O}(B)$, *стремящихся* *к* ξ, *необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число* $\epsilon > 0$, *что множество* $C(q_f, \xi, A_\epsilon(h_\xi))$ *ограничено.*

Дополним лемму 2 следующим утверждением.

Л е м м а 3. *Предположим, что последовательности* $\{z_m^1\}$ *и* $\{z_m^2\}$ *точек из* B *таковы, что* $\lim\limits_{m \to \infty} z_m^1 = \xi$, $\xi \in \partial B$, *и* $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(z_m^1, z_m^2) = 0$. *Если функция* $f \in \mathcal{O}(B)$ *имеет* $\lim\limits_{m \to \infty} f(z_m^1) = \alpha$ *и* $\lim\limits_{m \to \infty} f(z_m^2) = \beta$ *и* $\alpha \neq \beta$, *то обе последовательности являются P-последовательностями для* f.

С учетом результатов из [6] утверждение леммы 3 достаточно доказать для одной из последовательностей. Рассмотрим произвольную бесконечную последовательность $\{z_k^1\} \subset \{z_m^1\}$. Ей соответствует последовательность $\{z_k^2\} \subset \{z_m^2\}$, для которой $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(z_k^1, z_k^2) = 0$.

В группе $\mathrm{Aut}(B)$ биголоморфных автоморфизмов шара B выберем такие элементы $g_k \in \mathrm{Aut}(B)$, что $g_k(0) = z_k^1$, $k = 1, 2, \ldots$ Последовательность функций $\{f(g_k(z))\}$ не образует нормального в смысле Монтеля семейства ни в одной окрестности точки $z = 0$, поскольку в противном случае согласно [6] нашлась бы такая постоянная $M > 0$, что дифференциальная форма

$$\frac{i}{2}\, \partial\bar{\partial}(M|z|^2 - \log(1 + |f(g_k(z))|^2))$$

была бы положительно-определена на $\bar{B}_{1/2} = \{z \in \mathbf{C}^n; \{|z| \leqslant 1/2\}$, и, следовательно, сферическое расстояние между точками из $\mathbf{CP}^1$ с однородными координатами $[1, f(z_k^1)]$ и $[1, f(z_k^2)]$ стремилось бы к нулю при $k \to \infty$, что противоречит условию леммы.

Поэтому в любом шаре $B_\epsilon = \{z \in \mathbf{C}^n;\ |z| < \epsilon\}$ функции семейства $\{f(g_k z)\}$ принимают в совокупности все конечные комплексные значения за возможным одним исключением [9].

Так как при отображениях g_k, $k = 1, 2, \ldots$, шар B_ϵ переходит в $B_{\epsilon_1}(z_k^1)$, $k = 1, 2, \ldots$, то последовательность $\{z_m^1\}$ будет P-последовательностью функции f.

З а м е ч а н и е 2. В одномерном случае леммы 2 и 3 доказаны в [1, 2].

4. Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 1. Включение $C(f) \supset M(f) \cup I(f)$ следует из определений множеств. В произвольной точке $\xi \in C(f)$ могут существовать две возможности: (i) $C(f, \xi, B) = \Omega$ и (ii) $C(f, \xi, B) \neq \Omega$. Если реализуется возможность (i), то $\xi \in I(f)$. Если реализуется возможность (ii) и $\xi \bar{\in} M(f)$, то найдется такая хорда h_ξ и такое значение $a \in \Omega$, что $a \bar{\in} C(f, \xi, h_\xi)$, в то время как в каждом $A_\epsilon(h_\xi)$ имеется последовательность точек $\{z_m^\epsilon\}$, $\lim\limits_{m \to \infty} z_m^\epsilon = \xi$, по которой $\lim\limits_{m \to \infty} f(z_m^\epsilon) = a$. Устремляя ϵ к нулю, можно выбрать такую последовательность $\{z_m^1\}$, что $z_m^1 \to \xi$ $(m \to \infty)$, $f(z_m^1) \to a$ $(m \to \infty)$ и $\rho(z_m^1, h_\xi) \to 0$ $(m \to \infty)$. Выберем на h_ξ последовательность точек $\{z_m^2\}$ из условия $\rho(z_m^1, z_m^2) = \rho(z_m^1, h_\xi)$ при каждом фиксированном $m = 1, 2, \ldots$ Тогда $f(z_m^2) \nrightarrow a$ и $\rho(z_m^1, z_m^2) \to 0$ $(m \to \infty)$. Согласно лемме 3 последовательность $\{z_m^2\}$ обязана содержать подпоследовательность, являющуюся P-последовательностью функции f. Отсюда следует, что $C(f, \xi, B) = \Omega$. Противоречие доказывает лемму 1.

5. Для функции $f \in \mathcal{O}(B)$ рассмотрим множество $P(f) = \{\xi \in \partial B;$ любая хорда h_ξ содержит P-последовательность функции f, стремящуюся к $\xi\}$ и множество $I^*(f) = \{\xi \in \partial B;$ 1) ни одна из хорд h_ξ не содержит P-последовательностей функции f, сходящихся к ξ, 2) $C(f, \xi, h_\xi) = \Omega$ для каждой хорды $h_\xi\}$.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция* $f \in \mathcal{O}(B)$, *тогда* $\partial B = M(f) \cup P(f) \cup I^*(f) \cup E$, *где* E – *множество первой категории на* ∂B.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проведем по схеме, которая предложена в случае $n = 1$ в работе [1]. В этом случае утверждение теоремы 4 справедливо для произвольной мероморфной функции.

Обозначим $\mathfrak{M} = C(f) \cap C(q_f)$, где $q_f(z) = |\nabla f(z)|^2(1 + |f(z)|^2)^{-2}$. Согласно теореме 1 $\partial B = \mathfrak{M}' \cup E$, где E – множество первой категории и типа F_σ. В произвольной точке $\xi \in \mathfrak{M}$ могут реализоваться следующие четыре возможности:

(i) $C(f, \xi, B) \neq \Omega$ и $C(q_f, \xi, B)$ ограничено;

(ii) $C(f, \xi, B) = \Omega$ и $C(q_f, \xi, B)$ не ограничено;

(iii) $C(f, \xi, B) = \Omega$ и $C(q_f, \xi, B)$ ограничено; и

(iv) $C(f, \xi, B) \neq \Omega$ и $C(q_f, \xi, B)$ не ограничено.

Четвертая возможность на самом деле реализоваться не может, поскольку неограниченность множества $C(q_f, \xi, B)$ влечет за собой (см. [6]) существование P-последовательности функции f, сходящейся к точке ξ, и ведет поэтому к заключению, что $C(f, \xi, B) = \Omega$.

Если реализуется возможность (ii), то согласно лемме 2, $\xi \in P(f)$. Если реализуется возможность (i) или (iii), то согласно леммам 2 и 3 $\xi \in M(f)$ или $\xi \in I^*(f)$.

З а м е ч а н и е 2. Приведенные выше рассуждения показывают, что всеми теми свойствами, которыми функция $f \in \mathcal{O}(B)$ обладает в точках множеств $M(f)$, $I^*(f)$ и $P(f)$ вдоль хорд h_ξ, она обладает также вдоль произвольных жордановых кривых, лежащих в областях $A_\epsilon(h_\xi)$, $\epsilon > 0$, и идущих к границе.

6. Лемма 2 и аргументы, аналогичные тем, какие были использованы в доказательстве теоремы 1, позволяют доказать следующий результат.

Т е о р е м а 5. *Для произвольной функции $f \in \mathcal{O}(B)$ множество $P(f)$ имеет тип G_δ на ∂B.*

В случае $n = 1$ утверждение теоремы 5 установлено для мероморфных функций. Более того, в этом случае для произвольного множества E типа G_δ на единичной окружности $|z| = 1$ существует такая мероморфная в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$, что $E = I(f) = P(f)$ (см. [3], а также [10], где доказана теорема 2 в случае $n = 1$).

7. Все результаты настоящей статьи сформулированы и доказаны применительно к семейству некасательных граничных путей (хорд) шара B. Не представляет труда перенести их на семейства касательных граничных кривых шара B с произвольным порядком касания границы.

Московский государственный униветситет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
17 XII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаврилов В.И.* – ДАН, 1974, т. 216, № 1, с. 21–23. 2. *Гаврилов В.И.* – Матем. сб., 1966, т. 71, 3, с. 386–404. 3. *Гаврилов В.И., Канатников А.Н.* – ДАН, 1977, т. 232, № 6, с. 1237–1240. 4. *Гаврилов В.И., Канатников А.Н.* – ДАН, 1977, т. 233, № 1, с. 13–17. 5. *Канатников А.Н.* – ДАН, 1978, т. 238, № 5, с. 1043–1046. 6. *Довбуш П.В.* Вестн. МГУ. Сер. матем., мех., 1981, № 1, с. 38–42. 7. *Довбуш П.В.* – Там же, 1981, № 6, с. 34–36. 8. *Долженко Е.П.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1967, т. 31, № 1, с. 3–14. 9. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. М.–Л., 1936. 10. *Lappan P.* – Bull. London Math. Soc., 1970, vol. 2, № 1, p. 60–62.