ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1982

ТОМ 263 № 1

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

Т е о р е м а 2. *Пусть корни уравнения* (3) *различны и лежат на* k, $k < n$, *лучах, выходящих из начала; тогда система с.п.ф. задачи* (1), (2) *имеет бесконечный дефект в смысле* $(k+1)$*-кратной полноты в* $L_2(0,1)$.

Автор приносит глубокую благодарность В.А. Ильину за постановку задачи и ее обсуждение.

Дагестанский государственный университет
им. В.И. Ленина, Махачкала

Поступило
29 VII 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагабов А.И.* – ДАН, 1981, т. 257, № 1, с. 15–18. 2. *Гасымов М.Г., Магеррамов А.М.* – Докл. АН АзербССР, 1974, т. 30, № 12, с. 9–12. 3. *Оразов М.Б.* – Изв. АН ТуркмССР, сер. физ.-техн., хим. и геол. наук, 1976, № 2. 4. *Келдыш М.В.* – ДАН, 1951, т. 77, с. 11–14.

УДК 517.55 МАТЕМАТИКА

П.В. ДОВБУШ

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 1 VII 1981)

Нормальные мероморфные функции одного комплексного переменного интенсивно изучаются с 1957 г. после опубликования работы [1]. В обзорах [2, 3] собраны основные достижения, полученные к настоящему времени. В работе [4] было установлено, что мероморфная в круге функция будет нормальной тогда и только тогда, когда она не имеет P-последовательности. В статье [5] изучались нормальные голоморфные функции многих комплексных переменных, определенные в ограниченных однородных областях, и было показано, что и в этом случае свойство нормальности полностью характеризуется в терминах P-последовательностей.

В настоящей работе это характеристическое свойство положено в основу определения нормальных функций, заданных в произвольных областях пространства $\mathbf{C}^n$, $n > 1$. Доказываются необходимое и достаточное условие нормальности голоморфной функции в терминах ее градиента в метрике Бергмана и изучается граничное поведение нормальных голоморфных функций.

1. Пусть D – ограниченная область в $\mathbf{C}^n$, $n > 1$; $(F_{b,D})^2$ – метрика Бергмана области D, а $\mathcal{O}(D)$ – множество всех функций, голоморфных в области D.

О п р е д е л е н и е 1. Последовательность $\{z^m\}$, $z^m \in D$, $m = 1, 2\ldots$, называется P-п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь ю ф у н к ц и и $f \in \mathcal{O}(D)$, если:

1) $z^m \to \xi \in \partial D$, $m \to \infty$, и

2) для любого $\epsilon > 0$ и любой подпоследовательности $\{z^k\} \subset \{z^m\}$ функция f в $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_\epsilon^b(z^k)$, где $B_\epsilon^b(z^k)$ – шар в метрике Бергмана с центром z^k и радиуса ϵ, принимает бесконечно часто все значения из $\mathbf{C}$ за исключением, быть может, одного.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $f \in \mathcal{O}(D)$ называется н о р м а л ь н о й в о б л а с т и $D \subset \mathbf{C}^n$, $n > 1$, если она не обладает P-последовательностью.

З а м е ч а н и е. Пусть G – ограниченная однородная область в $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, и $\mathrm{Aut}(G)$ – группа ее биголоморфных автоморфизмов. Функцию $f \in \mathcal{O}(G)$ мы называем н о р м а л ь н о й, если нормально семейство $\{f(g)\}$, $g \in \mathrm{Aut}(G)$, т.е. если из любой последовательности $\{f(g_\mu)\}$, $g_\mu \in \mathrm{Aut}(G)$, $\mu = 1, 2, \ldots$, можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на компактных подмножествах G либо к голоморфной функции, либо к тождественной бесконечности. В работе [5] было доказано, что функция $f \in \mathcal{O}(G)$ будет нормальной тогда и только тогда, когда она не обладает P-последовательностью.

2. Пусть $f \in \mathcal{O}(D)$, величину

$$|\nabla f(z)|^2 = \sup\left\{\left|\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial f(z)}{\partial z_\mu}\,\omega_\mu\right|^2 \Big/ (F_{b,D}(z,\omega))^2,\ \ \omega \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}\right\}$$

называют к в а д р а т о м м о д у л я г р а д и е н т а ф у н к ц и и f в т о ч к е $z \in D$ в метрике Бергмана $F_{b,D}$.

Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. *Пусть D – строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^n$, $n > 1$. Функция $f \in \mathcal{O}(D)$ не является нормальной тогда и только тогда, когда*

$$\overline{\lim_{z \to \partial D}}\ |\nabla f(z)|^2 (1 + |f(z)|^2)^{-2} = +\infty.$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

Л е м м а. *Пусть D – строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^n$, $n > 1$, и $F_{c,D}$ – метрика Каратеодори области D. Тогда найдется постоянная $k > 0$, зависящая только от области D, такая, что:*

а) $k \cdot F_{b,D} \leqslant F_{c,D}$,

б) $k \cdot F_{b,D} \leqslant F_{b,G}$ *для любой области* $G \subset D$.

Доказательство леммы мы опускаем.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть последовательность $\{z^m\}$, $z^m \in D$, $m = 1, 2, \ldots$, такова, что $z^m \to \xi \in \partial D$, $m \to \infty$, и

$$\text{(1)}\qquad \lim_{m \to \infty} |\nabla f(z^m)| \cdot (1 + |f(z^m)|^2)^{-1} = +\infty.$$

Предположим, что $\{z^m\}$ не является P-последовательностью функции f. Тогда найдется $\epsilon > 0$ и подпоследовательность $\{z^k\} \subset \{z^m\}$ такая, что в $\bigcup_{k=1}^{\infty} B^b_\epsilon(z^k)$ функция f не принимает, по крайней мере, двух конечных значений. Для каждой точки $z^m \in D$, достаточно близкой к ∂D, определена единственная точка $\xi^m = \xi(z^m) \in \partial D$, для которой $|z^m - \xi^m| = \inf\{\xi \in \partial D\colon |z^m - \xi|\} = \delta_m$. Очевидно, что $\xi^m \to \xi \in \partial D$, $m \to \infty$.

По лемме 2.2 в [6] найдутся биголоморфные отображения $h_m\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ такие, что $h_m(\xi^m) = 0$, $w^m = h_m(z^m) = ('0, -\delta_m)$ (здесь и далее $'w = (w_1, w_2, \ldots, w_{n-1})$), комплексная касательная плоскость к границе области $D_m = h_m(D)$ в точке ξ^m задается уравнением $w_n = 0$, а комплексная нормаль к ∂D_m в точке ξ^m совпадает с множеством $\{w \in \mathbf{C}^n\colon w = ('0, w_n)\}$.

Основная идея доказательства состоит во введении в рассмотрение последовательности функций

$$g_m(\tilde{w}) = f \circ h_m^{-1}(\sqrt{\delta_m}\ '\tilde{w}, \delta_m \tilde{w}_n), \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Из описания шаров в метрике Каратеодори (см. [7], с. 351) и леммы следует, что $B^b_\epsilon(z^m)$ при z^m, достаточно близких к ∂D, содержит эллипсоид

$$\left\{w \in \mathbf{C}^n\colon \frac{|'w|^2}{\delta_m} + \frac{|w_n + \delta_m|^2}{\delta_m^2} < (\alpha\epsilon)^2\right\},$$

где постоянная α зависит только от области D. Поэтому все функции g_k, начиная с некоторого номера m_0, определены и голоморфны в шаре $B_{\alpha\epsilon}(('0, -1)) = \{\tilde{w} \in$

$\in \mathbf{C}^n$: $|'\tilde{w}|^2 + |\tilde{w}_n + 1|^2 < (\alpha\epsilon)^2\}$ и в совокупности не принимают двух конечных значений, следовательно (см., например, [8], с. 191), они образуют нормальное семейство. Поэтому (см. лемму в [5]) найдется постоянная K такая, что

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \log(1+|g_k|^2)}{\partial \tilde{w}_\mu \partial \bar{\tilde{w}}_\nu}\right|_{('0,-1)} \omega_\mu \omega_\nu \leqslant K|\omega|^2$$

для всех $k \geqslant m_0$, $\omega \in \mathbf{C}^n$. Откуда получаем

$$(2) \qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \log(1+|f\circ h_k^{-1}|^2)}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu}\right|_{('0,-\delta_k)} \omega_\mu \bar{\omega}_\nu \leqslant K\left\{\frac{|'\omega|^2}{\delta_k} + \frac{|\omega_n|^2}{\delta_k^2}\right\}$$

для всех $k \geqslant m_0$, $\omega \in \mathbf{C}^n$. Из леммы, неравенства (2) и теоремы 1 в [9] следует, что найдется постоянная K_1 такая, что

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \log(1+|f\circ h_k^{-1}|^2)}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu}\right|_{('0,-\delta_k)} \omega_\mu \bar{\omega}_\nu \leqslant K_1(F_{b,D}(('0,-\delta_k),\omega))^2$$

для всех $k \geqslant m_0$, $\omega \in \mathbf{C}^n$. Отсюда, пользуясь тем, что метрика Бергмана инвариантна относительно биголоморфных отображений, получаем

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \log(1+|f|^2)}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}\right|_{z^k} \omega_\mu \omega_\nu \leqslant K_1(F_{b,D}(z^k,\omega))^2,$$

что противоречит равенству (1).

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\{z^m\}$ есть P-последовательность функции f, тогда семейство функций $\{g_m\}$ в любом шаре $B_r(('0,-1))$, $r > 0$, принимает бесконечно часто все значения из $\mathbf{C}$ за исключением, быть может, одного и, следовательно, не может быть нормальным. Поэтому из критерия Марти [5] следует, что найдутся последовательность точек $\{\tilde{w}'_m\}$, $\tilde{w}'_m \in B_r(('0,-1))$, $m = 1, 2, \ldots,$ и последовательность векторов $\{\tilde{\omega}'^m\}$, $\tilde{\omega}'^m \in \mathbf{C}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, таких, что

$$(3) \qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \log(1+|g_m|^2)}{\partial \tilde{w}_\mu \partial \bar{\tilde{w}}_\nu}\right|_{\tilde{w}'_m} \tilde{\omega}'^m_\mu \bar{\tilde{\omega}}'^m_\nu \geqslant m|\tilde{\omega}'^m|^2$$

для всех $m \geqslant 1$. Из неравенства (3) получаем

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \log(1+|f\circ h_m^{-1}|^2)}{\partial w_\mu \partial \bar{w}_\nu}\right|_{w'_m} \omega'^m_\mu \bar{\omega}'^m_\nu \geqslant m\left\{\frac{|'\omega'^m|^2}{\delta_m} + \frac{|\omega'^m|^2}{\delta_m^2}\right\},$$

где $w'_m = (\sqrt{\delta_m}\,'\tilde{w}'_m,\ \delta_m \tilde{w}'_{mn})$, $\omega'^m = (\sqrt{\delta_m}\,'\tilde{\omega}'^m,\ \delta_m \tilde{\omega}'^m_n)$. Отсюда и из теоремы 1 в [9] имеем

$$(4) \qquad \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \left.\frac{\partial^2 \log(1+|f|^2)}{\partial z_\mu \partial \bar{z}_\nu}\right|_{z'_m} \omega^m_\mu \bar{\omega}^m_\nu \geqslant \frac{m}{2}(F_{b,D}(z'_m,\ \omega^m))^2;$$

здесь $z'_m = h_m^{-1}(w'_m)$, а $\omega^m = (h_m^{-1})_* \omega'^m$, где $(h_m^{-1})_* = dh_m^{-1}$ – дифференциал отображения h_m^{-1} в точке w'^m.

Из неравенства (4) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} |\nabla f(z'_m)|^2 (1+|f(z'_m)|^2)^{-2} = +\infty.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Отметим, что в случае, когда D есть единичный круг, эта теорема доказана в [4] для мероморфных функций.

3. Пусть D – строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^n$, $n > 1$. Для любых $\alpha, k > 0$ и ϵ, $0 < \epsilon < 1$, определим область

$$A_\alpha(\xi) = \{z \in D\colon\ |(z - \xi, \nu_\xi)| < (1+\alpha)\delta_\xi(z),\ |z - \xi|^2 < k\delta_\xi(z)^{1+\epsilon}\},$$

где ν_ξ – вектор единичной внешней нормали к ∂D в точке $\xi \in \partial D$, $(\cdot, \cdot)$ – обычное эрмитово скалярное произведение в $\mathbf{C}^n$, а $\delta_\xi(z)$ – минимум из расстояний от z до ∂D и до действительной касательной плоскости к ∂D в точке ξ.

Будем говорить, что функция $f \in \mathcal{O}(D)$ имеет в точке $\xi \in \partial D$ допустимый предел $f(\xi)$, если $\lim\limits_{z \to \xi,\ z \in A_\alpha(\xi)} f(z) = f(\xi)$ для всех $\alpha > 0$. Справедлива

Теорема 2. *Если функция f нормальна в строго псевдовыпуклой области $D \subset \mathbf{C}^n$ и имеет предел $f(\xi)$ вдоль некоторой кривой $\{z(t), 0 < t \leqslant 1\} \subset \{z \in D\colon |z - \xi| < (1+\alpha)\delta_\xi(z)\}$, оканчивающейся в точке ξ, то f в точке ξ имеет допустимый предел, равный $f(\xi)$.*

Следствием теоремы 2 является

Теорема 3. *Функция f, нормальная в строго псевдовыпуклой области $D \subset \mathbf{C}^n$, $n > 1$, имеет допустимые пределы на всюду плотном подмножестве ∂D.*

Замечание. В случае, когда область D есть единичный круг, эта теорема доказана В.И. Гавриловым в [10] и независимо Багемилом и Зейделем в [11].

Автор глубоко благодарен В.И. Гаврилову за предложенную тематику и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
4 IX 1981

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lexto O., Virtanen K.P.* – Acta Math., 1957, vol. 97, № 1–2, p. 47–65. 2. Математический анализ (итоги науки). М., 1973, т. 10, с. 259. 3. *Campbell D.M., Wikes G.* – Lecture Notes in Math. B.; N.Y., 1979, vol. 747, p. 55–72. 4. *Гаврилов В.И.* – Матем. сб., 1965, т. 67, № 3, с. 408–427. 5. *Довбуш П.В.* – Вестн. МГУ. Сер. матем., 1980, № 1, с. 38–42. 6. *Пинчук С.И.* – Матем. сб., 1980, т. 111, № 1, с. 67–94. 7. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976, т. 2, с. 400. 8. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. М.; Л.: ОНТИ, 1936, с. 240. 9. *Хенкин Г.М.* – ДАН, 1973, т. 210, № 5, с. 1026–1029. 10. *Гаврилов В.И.* – ДАН, 1961, т. 141, № 3, с. 525–526. 11. *Bagemil J., Seidel W.* – Comment Math. Helv., 1961, vol. 36, p. 9–18.

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

П.С. КНОПОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком В.М. Глушковым 8 VII 1981)

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – некоторое вероятностное пространство, $(F_{st},\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0)$ – согласованное двупараметрическое семейство σ-подалгебр $\mathcal{F}$, т.е. $F_{st} \subset F_{s_1 t_1}$, если $s \leqslant s_1$, $t \leqslant t_1$. На $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано двумерное стандартное винеровское поле $w(s, t)$. Справедливо следующее утверждение, являющееся обобщением на двумерный случай моментных неравенств для стохастических интегралов, доказанных А.А. Новиковым в [1].